Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра исследования операций

Вывод закона сохранения момента импульса из принципа наименьшего действия и изотропности пространства.

Динамическая модель коллективного поведения.

Работу выполнила студентка 511 группы

Нагаева Варвара

Москва

2020 г.

1. **Вывод закона сохранения момента импульса из принципа наименьшего действия и изотропности пространства.**
   1. **Принцип наименьшего действия**

Состояние динамической системы описывается функцией времени. Лагранжиан такой системы описывает ее эволюцию и является функцией обобщенных координат – величин, определяющих положение системы – например, координат частиц. Производные обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями.

*Принцип наименьшего действия:*пусть в момент времени механическая система занимает положение , в момент – . Тогда из всех возможных траекторий, по которым система могла перейти из положения в , в действительности реализуется траектория, доставляющая минимум интегралу

.

Этот принцип может не выполняться для всей траектории в целом, он может оказаться справедливым лишь для каждого из достаточно малых участков, а для всей траектории интеграл может достигать лишь локального минимума, но не глобального.

Обобщённым импульсом называется частная производная лагранжиана системы по обобщённой скорости:

Момент импульса характеризует количество вращательного движения:

Обобщенная сила – производная импульса:

Из изотропности пространства следует то, что при любом повороте замкнутой механической системы как единого целого, ее свойства остаются неизменными.

* 1. **Вывод закона сохранения момента импульса**

Совершим бесконечно малый поворот системы на вектор . При таком повороте радиус-векторы частиц получат приращение . Приращение скорости – .

Лагранжиан остается неизменным при повороте:

После циклической подстановки:

Так как вектор поворота выбирался произвольно, значит из последнего равенства:

Таким образом, момент импульса системы:

* 1. **Зависимость момента импульса от выбора начала координат**

Момент импульса может быть вычислен относительно любого начала отсчета; однако чаще всего (для удобства и определенности) его вычисляют относительно центра масс или закрепленной точки вращения твердого тела и т.п.

В общем случае момент импульса зависит от выбора начала координат. Рассмотрим две системы, сдвинутые одна относительно другой на вектор . Моменты импульсов систем связаны следующим образом:

* 1. **Момент импульса системы, движущейся относительно другой системы**

Пусть система движется относительно системы со скоростью.

Таким образом,

Где – радиус-вектор центра масс системы в системе .

* 1. **Момент импульса системы во внешнем поле**

Момент импульса системы материальных точек, помещенных во внешнее поле, в общем случае не сохраняется.

Обозначим потенциальную энергию взаимодействия частиц системы между собой .

– потенциальная энергия внешнего поля.

При отсутствии внешнего поля сумма моментов сил взаимодействия между частицами замкнутой системы равно нулю, а описанное выше равенство примет вид

где



То есть изменение момента системы материальных точек в единицу времени равно сумме моментов сил, приложенных к точкам системы со стороны внешнего поля.

1. **Динамическая модель коллективного поведения.**
   1. **Краткое описание статической модели коллективного поведения**

Пусть лицо, принимающее решение, может принять одну из двух альтернатив: . Вероятность того, что индивид примет первое решение равно , а второе .

Пусть – коэффициент индивидуализма ЛПР . При ЛПР действует абсолютно самостоятельно, а при ЛПР меняет решения в угоду любому чужому мнению.

Пусть – вероятность того, что ЛПР примет первое решение после общения с ЛПР , при условии что ЛПР придерживается первой альтернативы.

Для по формуле полной вероятности *вероятность того, что после общения с коллективом им будет принять первое решение* равно . Для соответствующая вероятность будет равна некоторой априорной вероятности . Для промежуточных значений будем вычислять описанное значение как

* 1. **Описание динамической модели**

Величины являются функциями непрерывного времени . Описанная выше модель может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений:

Стационарные решения этой системы удовлетворяют уравнениям статической модели П.С.Краснощекова.

Положим время дискретным: , и предположим, что априорное решение на данном шаге равно апостериорному значению, полученному на предыдущем шаге. Обозначим . Модель приняла следующий вид:

С параметрами . Требуется найти , при заданных начальных условиях , .

Пусть ,

, диагональная матрица, – единичная матрица.

Обозначим .

Система (\*) перепишется в векторном виде:

* 1. **Исследование существования и устойчивости решения задачи**

***Лемма 1.1.***Если все параметры , то система уравнений (\*\*), а значит и система (\*) однозначно разрешимы и справедливы рекуррентные соотношения .

Если же при этом , то и .

***Лемма 1.2.***Для любой положительной матрицы , у которой сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю и значений , решения уравнения (\*) таковы, что выполняются неравенства:

Более того, существует , для которого справедливо неравенство:

***Следствие 1.***Все значения при

***Теорема 1.1.***Если выполнены условия леммы 1.2 и все компоненты , то и все компоненты .

***Теорема 1.2 (об устойчивости).*** Решения системы уравнений (\*) устойчивы к возмущениям начальных условий. Иными словами, если все возмущения , то и все вариации .

* 1. **Решение задачи**

Рассмотрим две матрицу , размера , и комплексное число . Обозначим, где параметры могут принимать значения 0 и 1. Будем искать нетривиальное решение однородной системы СЛАУ:

Критерием существования этого решения является условие равенства матрицы коэффициентов нулю. Это характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением степени не выше N. Корень данного уравнения назовём обобщенным характеристическим числом уравнения (\*\*\*), а соответствующее ему решение характеристическим вектором этого уравнения. Характеристический вектор определён с точностью до множителя.

***Теорема 1.4.*** Пусть - обобщенное характеристическое число, а соответствующий ему характеристический вектор матрицы

Тогда функция является решением уравнения (\*\*).

Общее решение уравнения (\*\*) примет вид , где – собственные числа матрицы , , – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий:

Получаем